OPCIÓN A

1A.- (3 puntos) (a) (1,5 puntos) Resuelva el sistema: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) (1,5 puntos) Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ es 4, es decir |A| = 4,

determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación: $\begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$.

Solución

a)

Resuelva el sistema: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El sistema es homogéneo, por tanto sólo necesitamos la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

En A como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1-2F_3 \\ F_2-2F_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 0, por tener dos filas proporcionales, luego rango(A) < 3.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4 \neq 0$, rango(A) = 2, y

por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.**

Tomamos la segunda y tercer ecuación: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \; (E_2 - E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 0 \\ + 2y + z = 0 \end{cases}$. Tomando $y = m \in R$

tenemos z = - 2m, y de "x + (m) + (-2m) = 0, x = m, luego **la solución del sistema es (x,y,z) = (m, m, -2m) con y = m $\in$ R**.

(b)

Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ es 4, es decir |A| = 4, determine el

determinante de la matriz B que aparece a continuación: $\begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{vmatrix} = \{i\} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3a+k & 3b+k & 3c+k \\ x+5 & y+5 & z+5 \end{vmatrix} = \{ii\} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a+k & 3b+k & 3c+k \\ x+5 & y+5 & z+5 \end{vmatrix} = \{ii,\ F_3-5F_1\} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a+k & 3b+k & 3c+k \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{v\} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{ii\} = 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2\cdot k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{v\} =$$

$= 6\cdot|A| + 2k\cdot(0)$ **= 24.**

(i) El determinante de una matriz coincide con el determinante de su matriz traspuesta.
(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
(iii) Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

(iv) Si a una fila (columna) se le suma otra multiplicada por un número el determinante no varía.
(v) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.
(vi) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

2A.- (1,5 puntos) (a) (0,5 puntos) Dados los vectores **u** = (1, 2, 1), **v** = (2, 1, 1) y **w** = (0, 2, 1), determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

(b) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes: $r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1}$, $s: \begin{cases} -x+y+2z-4=0 \\ x+2y+z-5=0 \end{cases}$.

Solución

(a)

Dados los vectores **u** = (1, 2, 1), **v** = (2, 1, 1) y **w** = (0, 2, 1), determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan con un origen común, es decir:

Volumen = | [**u**, **v**, **w**] | **= | -1 | u³ = 1 u³.**

Porque [**u**, **v**, **w**] = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-2F_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1(-3+2) -0 + 0 = -1.$

(b)

Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes: $r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1}$, $s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

De la recta r un punto es el A(-1, 0, -2) y un vector el **u** = (4, 6, 1)

Ponemos la recta s en paramétricas. Sumando las ecuaciones $s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ 3y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$, de donde y + z = 3, tomando z = m ∈ R tenemos y = 3 - m, y de “x + 2(3 – m) + (m) – 5 = 0, x = -1 + m, es decir $s \equiv \begin{cases} x = -1 + m \\ y = 3 - m \\ z = m \end{cases}$ y = m ∈ R. Un punto de la recta s es B(-1, 3, 0) y un vector director de la recta s es **v** = (1, -1, 1).

Observamos que los vectores **u** y **v** no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan.
Tenemos **AB** = (0, 3, 2)
Si det(**AB**,**u**,**v**) = 0, las rectas se cortan. Si det(**AB**,**u**,**v**) ≠ 0, las rectas se cruzan.

Como det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-4F_3 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 0 - 0 + 1\cdot(-9-20) = -29 \neq 0$, luego **las rectas se cruzan**.

3A.- (4 puntos) (a) (2,5 puntos) Considere la función: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

a.1) (1 punto) Determine las asíntotas de la función f(x).
a.2) (1’5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función f(x).

(b) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral: $\int \frac{9}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución

(a)

Considere la función: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

(a.1)

Determine las asíntotas de la función f(x).

Sabemos que x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, **la recta x = 1 es una A.V. de la gráfica de f(x)**.

Posición relativa $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx + n$ con $m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$. Como hay A.O en $\pm\infty$, f no tiene asíntotas horizontales (A.H.) en $\pm\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

x^2-3x+3	x-1
-x^2 +x	x - 2
0 -2x+3	
+2x-2	
1	

La A.O. de f(x) es y = x - 2 en $\pm\infty$.
Veámoslo también con límites.

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x\cdot(x - 1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1/12\right) = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 3x + 3 - x^2 + x}{x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x + 3}{x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-2\right) = -2$$

Efectivamente la A.O. de f(x) era **y = x - 2** en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - (x - 2)\right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - (x - 2)\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)

Cómo en este caso existe A.O. no hay asíntotas horizontales (A.H.)

(a.2)
Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función f(x).

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}\ ;\ f'(x) = \frac{(2x - 3)\cdot(x - 1) - (x^2 - 3x + 3)\cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

Si f '(x) = 0 $\to$ $x^2 - 2x = 0 = x\cdot(x - 2)$, de donde x = 0 y x = 2, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-1) = 3/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(-\infty, 0)$.**

Como f '(0'5) = -0'75/(+) < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0, 2) - {1}.**

Como f '(3) = 3/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(2, +\infty)$.**

Por definición en x = 0 hay un máximo relativo que vale f(0) = -3.
Por definición en x = 2 hay un mínimo relativo que vale f(2) = 1.

(b)
Calcule la siguiente integral: $\int \frac{9}{x^2 + x - 2}dx$.

$$I = \int \frac{9\cdot dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{9\cdot dx}{(x-1)(x+2)} = \{\text{Integral racional}\} = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x+2}dx = A\cdot\ln|x-1| + B\cdot\ln|x+2| + K = \{+++\} =$$

$= 3\cdot\ln|x-1| - 3\cdot\ln|x+2| + K = 3\cdot\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right) + K.$

{+++} Calculamos A y B

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Igualando numeradores:

9 = A(x+2) + B(x-1). Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador.
Para x = 1, 9 = A(3) $\rightarrow$ A = 3
Para x = -2, 9 = B(-3) $\rightarrow$ B = -3

4A.- (1'5 puntos) Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tienen la misma probabilidad de aparecer).
(a) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.
(b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos.
(NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Solución
(a)
Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

Recordamos que si realizamos **n** veces (10) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 3/6 = 1/2 = 0'5) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 - p = 1 - 0'5 = 0'5), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(10; 0'5)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (10\ sobre\ k).0'5^{k}\cdot 0'5^{(10-k)} = \binom{10}{k}.0'5^{k}\cdot 0'5^{(10-k)}.}$$

**** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n-k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X = 10) = \binom{10}{10}\cdot 0'5^{3}\cdot 0'5^{7} = \frac{10!}{10!\cdot 0!}\cdot 0'5^{3}\cdot 0'5^{7} = 1\cdot 0'5^{10} = 1/1024.}$

(b)
Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos.

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X = 3) = \binom{10}{3}\cdot 0'5^{3}\cdot 0'5^{7} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot 0'5^{10} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0'5^{10} = 120/1024 = 15/128.}$

OPCIÓN B

1B.- (3 puntos) (a) (1,5 puntos) Dadas las matrices el sistema: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ encuentre la matriz X, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial: $AX + B = A^2$.
(b) (1,5 puntos) Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución
(a)
Dadas las matrices el sistema: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ encuentre la matriz X, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial: $AX + B = A^2$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ $= 0 - 0 + 1(0-1) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

De $AX + B = A^2$, tenemos $AX = A^2 - B$ y multiplicando por la izquierda por $A^{-1} \rightarrow A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot A^2 - A^{-1}\cdot B$, es decir $I\cdot X = I\cdot A - A^{-1}\cdot B \rightarrow$ $\mathbf{X = A - A^{-1}\cdot B}$.

Tenemos $|A| = -1$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A^{-1}\cdot B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Luego $\mathbf{X = A - A^{-1}\cdot B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b)

Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k: $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{vmatrix} C_1 - C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & k \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} F_2 - 2F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-6 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{segunda}\\ \text{fila}\end{matrix}$ $= - +0-(k-6)(k) = k\cdot(6 - k)$.

De $|C| = 0$, tenemos $k\cdot(6 - k) = 0$, de donde $k = 0$ y $k = 6$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq 6$, tenemos $|C| \neq 0$ y rango(C) = 3.

Si $k = 0$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$, tenemos **rango(C) = 2.**

Si $k = 6$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$, tenemos **rango(C) = 2.**

2B.- (1,5 puntos) Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta : $r: \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$, esté contenida en el plano: $\pi : mx + y + nz = 4$.

Solución

Si la recta está contenida en el plano dos puntos A y B de la recta deben de verificar la ecuación del plano.

Ponemos la recta r en forma paramétrica $r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x+3y+z = 3 \ (E2-E1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$. Tomando $y = m \in R$ tenemos $x = 1 - 2m$, y de "$(1 - 2m) + (m) + z = 2$, $z = 1 + m$, es decir $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2m \\ y = m \\ z = 1 + m \end{cases}$ con $m \in R$. Un punto de la recta r es $A(1, 0, 1)$ y otro $B(-1, 1, 0)$, tomando $m = 1$.

Como $A \in \pi \rightarrow m(1) + (0) + n(1) = 4 \rightarrow m + n = 4$.

Como $B \in \pi \rightarrow m(-1) + (1) + n(0) = 4 \rightarrow -m + 1 = 4$, de donde **m = -3 y n = 7.**

3B.- (4 puntos) (a) (1,5 puntos) Calcule el límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$.

(b) (1,5 puntos) De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo
(c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta $y = x + 4$.

Solución
(a)

Calcule el límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$

Base: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+1)\cdot x^2 - x\cdot(x^3-x^2-x+2)}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^4+x^2-x^4+x^3+x^2-2}{x^3}\right)=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-2}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^3}\right)=1.$

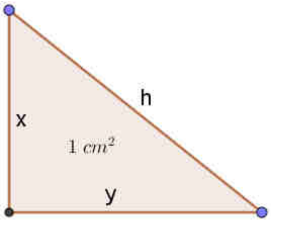
Exponente: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}(x)=\infty.$

Tenemos $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=1^\infty$, que es una indeterminación del número "e".

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-2}{x^3}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^3+2x^2-2}{x^3}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^3+2x^2-2-x^3}{x^3}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2}{x}\right)\cdot\left(\frac{2x^2-2}{x^3}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+4x^2-6}{x^4}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4}{x^4}\right)}=\mathbf{e^2}.$$

(b)
De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo



Por el teorema de Pitágoras sabemos que $h^2 = y^2 + x^2$, de donde $h = +\sqrt{x^2+y^2}$ (es positiva por ser longitud)

Función a optimizar: $h(x,y) = +\sqrt{x^2+y^2}$

Relación: Área = 1 = (1/2)x·y, de donde y = 2/x, luego la función a optimizar es:

$h(x) = +\sqrt{x^2+(2/x)^2} = +\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}\cdot\frac{4x^3\cdot x^2 - 2x\cdot(x^4+4)}{x^4}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}\cdot\frac{2x^5-8x}{x^4}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}\cdot\frac{2x\cdot(x^4-4)}{x^4}.$$

De h '(x) = 0, tenemos $2x^5 - 8x = 0 = 2x\cdot(x^4 - 4)$, de donde x = 0 (no sirve, pues no hay triángulo) y $x^2-4=0$, de donde $x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt[4]{2^2} = \pm\sqrt{2}$, como x es una longitud solo sirve $x = +\sqrt{2} \cong 1'414$, que será el posible extremo relativo.

Como h '(1) = $\frac{2\cdot(1-4)}{(+)} = \frac{-12}{(+)} < 0$, **h(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0, √(2)).**

Como h '(2) = $\frac{4\cdot(16-4)}{(+)} = \frac{48}{(+)} > 0$, **h(h) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (√(2), +∞)..**

Por definición x = √(2) es un mínimo relativo.
Las longitudes de los tres lados del triángulo son:

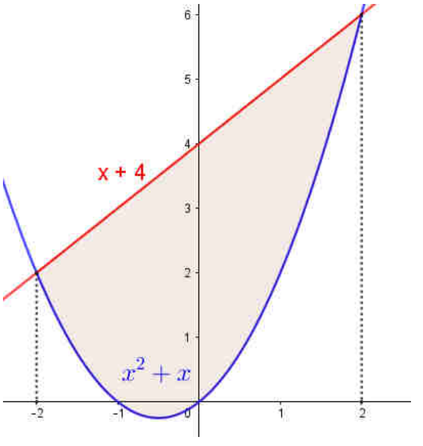
Base = x = $\sqrt{2}$ cm, altura = y = $2/\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$ cm y diagonal = h = $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$ cm = $\sqrt{4}$ cm = = 2 cm, es decir es un triángulo rectángulo isósceles.

(c)

Calcule el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta $y = x + 4$.

La gráfica de $f(x) = x^2 + x$ es la de una parábola así ($\cup$) porque el número que multiplica a ^{2} es positiva y abscisa del vértice en $f'(x) = 2x + 1 = 0$, $x = -1/2$.
La gráfica de $y = x + 4$ es la de una recta, con dos puntos es suficiente.
Cortes entre ellas: $f(x) = x^2 + x = y$, de donde $x^2 + x = x + 4$, es decir $x^2 = 4$ y $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ (estos son los límites de integración). Los puntos de corte son (-2, 2) y (2, 6).

Un esbozo de su gráfica es:



Luego el área es:

$$\textbf{Área} = \int_{-2}^{2}(x+4-(x^2+x))dx = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = [\,(8 - 8/3) - (-8 - (-8/3\,)\,]\,u^2 = \mathbf{(16 - 16/3)u^2} =$$

= 32/3 u^2 $\cong$ 10'66667 u^2.

4B.- (1,5 puntos) (a) (0,75 puntos) En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?
(b) (0,75 puntos) Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?
(NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Solución

(a)

En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

Sean los sucesos A = "estudiar ruso" y B = "practicar deporte".

Nos dan p(A) = 10/20 = 0'5, p(B) = 12/20 = 0'6, p(ruso y deporte) = $p(A\cap B)$ = 2/20 = 0'1.

Me están pidiendo **p(practique deporte si estudia ruso) = p(B/A) =** $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ **= 0'1/0'5 = 1/5 = 0'2.**

(b)

Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?

Recordamos que si realizamos **n** veces (12) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 0'8) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'8 = 0'2), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(12; 0'8)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (12\ sobre\ k).0'8^{k}\cdot 0'2^{(12-k)} = \binom{12}{k}.0'8^{k}\cdot 0'2^{(12-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n-k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

En nuestro caso piden **p(X ≥ 10) =** $\binom{12}{10}\cdot \mathbf{0'8^{10}\cdot 0'2^{2}} + \binom{12}{11}\cdot \mathbf{0'8^{11}\cdot 0'2^{1}} + \binom{12}{12}\cdot \mathbf{0'8^{12}\cdot 0'2^{0}} =$

$$\frac{12!}{10!\cdot 2!}\cdot \mathbf{0'8^{10}\cdot 0'2^{2}} + \frac{12!}{11!\cdot 1!}\cdot \mathbf{0'8^{11}\cdot 0'2^{1}} + \frac{12!}{12!\cdot 0!}\cdot \mathbf{0'8^{12}\cdot 0'2^{0} = 66\cdot 0'8^{10}\cdot 0'2^{2} + 12\cdot 0'8^{11}\cdot 0'2^{1} + 1\cdot 0'8^{12}\cdot 0'2^{0}} =$$

$\cong$ **0'5583457.**